Sinopfbd, 2026; 11(1): 401-423 https://doi.org/10.33484/sinopfbd.1832547

Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi
*Sinop Uni J Nat Sci*
E-ISSN: 2564-7873

https://dergipark.org.tr/tr/pub/sinopfbd

# GRLW Denkleminin Kübik Hermite B-Splayn Kollakasyon Yöntemiyle Sayısal Çözümü

**Sibel ÖZER**[1], **Yusuf UÇAR**[1] **ve Halil BEYAZIT**[1]

How to cite: Özer, S., Uçar, Y., & Beyazıt, H. (2026). GRLW denkleminin kübik Hermite B-Splayn kollakasyon yöntemiyle sayısal çözümü. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, *11*(1), 401-423. https://doi.org/10.33484/sinopfbd.1832547

Open Access

**Araştırma Makalesi**

**Sorumlu Yazar**
Sibel ÖZER
sibel.ozer@inonu.edu.tr

**Yazarlara ait ORCID**
S.Ö: 0000-0003-4956-4002
Y.U: 0000-0003-1469-5002
H.B: 0000-0002-0854-2301

**Received:** 29.11.2025
**Accepted:** 15.06.2026

**Özet**

Bu çalışma, akışkanlar dinamiğinde önemli bir yere sahip olan Genelleştirilmiş Düzenli Uzun Dalga (GRLW) denkleminin sayısal çözümünü içermektedir. Bu amaçla, GRLW denklemi Crank-Nicolson yöntemi ile ayrıklaştırıldıktan sonra, doğrusal olmayan terim Rubin-Graves doğrusallaştırma tekniğiyle lineerleştirildi ve kübik Hermite B-splayn kollakasyon sonlu elemanlar yöntemi uygulanarak bir lineer sayısal şema elde edildi. Bu önerilen sayısal şema bir soliter dalga problemi ile iki ve üç soliter dalganın girişimi problemlerine uygulanarak korunum sabitleri ve korunum sabitlerinin mutlak değişim miktarları ve ayrıca analitik çözümü mevcut olan bir soliter dalga problemi için hata normları hesaplandı. Hesaplanan hata normları ve korumum sabitleri tablolar halinde sunuldu ve aynı parametreler için mevcut olan çalışmalarla karşılaştırılarak yöntemin doğruluğu test edildi. Ayrıca, elde edilen sayısal sonuçların grafikleri çizilerek problemlerin fiziksel davranışları görsel olarak sunuldu. Tablolar ve grafikler, önerilen sayısal şemanın problemlerin korunum sabitlerini yeterince iyi bir şekilde koruduğunu ve mevcut olan çalışmalarla oldukça uyumlu olduğunu göstermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** GRLW denklemi, kollakasyon yöntemi, kübik Hermite B-splayn

# Numerical Solution of GRLW Equation by Cubic Hermit B-Spline Collocation Method

[1]İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Malatya, Türkiye

**Abstract**

This study deals with the numerical solution of the Generalized Regular Long Wave (GRLW) equation, which holds an important place in fluid dynamics. To this end, first of all, the GRLW equation is discretized by using the Crank-Nicolson method, then linearized using the Rubin-Graves linearization technique for nonlinear terms, and a linear numerical scheme is obtained by applying the cubic Hermite B-spline collocation finite element method. This proposed numerical scheme is applied to a solitary wave problem and the interaction of two and three solitary waves. Conservation constants and the absolute change quantities of the conservation constants are calculated for all problems, the error norms for a single solitary wave problem which has an exact analytical solution.

The calculated error norms and the conservation constants are presented in tables and compared with those of the existing studies for the same parameters to test the accuracy of the method. Furthermore, the graphs of the obtained numerical results are drawn to visually present the physical behavior of the problems. The tables and graphs show that the proposed numerical scheme sufficiently preserves the conservation constants of the problems and is in good agreement with the existing studies.

Bu çalışma Creative Commons Attribution 4.0 International License ile lisanslanmıştır

**Keywords:** GRLW equation, collocation method, cubic Hermite B-spline

## Giriş

Nonlineerlik parametresi $p > 2$ pozitif bir tamsayı, $\alpha = p\,(p+1)$ ve $\mu$ pozitif reel sayı olmak üzere Genelleştirilmiş Düzenli Uzun Dalga (GRLW) denklemi

$$u_t + u_x + \alpha u^p u_x - \mu u_{xxt} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)\,, \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

şeklinde olup GRLW denkleminin fiziksel sınır şartları $x \to \pm\infty$ için $u \to 0$, $u_x \to 0$ ve başlangıç şartı $u\,(x,0) = f(x)$ olarak verilir. GRLW denklemi, akışkanlar dinamiğinde bir su kanalının yüzeyindeki küçük genlikli uzun dalgaların modellenmesinde; plazmadaki iyon-akustik ve manyeto-hidrodinamik dalgaların modellenmesinde; elastik çubuklarda boyuna dağılan dalgaların modellenmesinde; sıvı gaz kabarcık karışımlarındaki basınç dalgalarının modellenmesinde kullanılır. $p = 1$ ve $p = 2$ için (1) denklemi sırasıyla Düzenli Uzun Dalga (RLW) denklemi ve modifiye edilmiş Düzenli Uzun Dalga (MRLW) denklemi olarak isimlendirilir [1–4]. GRLW denkleminin sayısal çözümleri bazı araştırmacılar tarafından çeşitli sayısal yöntemler kullanılarak elde edildi. Zhang [3] korumumlu sonlu fark yöntemini, Ramos [4] kapalı(compact) sonlu fark yöntemini, Mokhtari ve Mohammadi [5] Sinc baz fonksiyonları ile kollakasyon yöntemini, Wang ve ark. [6] hareketli en küçük kareler yöntemini, Roshan [7] lineer ve kuintik B-splayn fonksiyonları kullanılarak Petrov-Galerkin yöntemini, Danaf ve ark. [8] sonlu fark yöntemini, Berikelashvili ve Mirianashvili [9] üç seviye korunumlu sonlu fark yöntemini, Akbari ve Mokhtari [10] kompakt sonlu fark yöntemini, Guo ve ark. [11] kp-Ritz yöntemini, Hammad ve Azab [12] zamana göre geri sonlu farklar yaklaşımı ile ayrıklaştırıp kompakt sonlu farklar yöntemini, García-López ve Ramos [13] kompakt operatör yöntemini, Pan ve ark. [14] üç seviye lineer kapalı korunumlu sonlu fark yöntemini, Mohammadi [15] üstel B-splayn kollakasyon yöntemini, Li ve ark. [16] korunumlu kompakt sonlu fark yöntemini, Hammad ve El-Azab [17] Chebyshev spektral kollakasyon yöntemini, Karakoç ve Zeybek [18] septik B-splayn kollakasyon yöntemini, Zeybek ve Karakoç [19] kübik B-splayn Galerkin yöntemini, Ramos [20] kapalı sonlu fark ve Runge-Kutta yöntemlerini, El-Danaf ve ark. [21] polinom olmayan splayn yöntemini, Ramos ve García–López [22] lineer kompakt sonlu fark yöntemini, Li ve Mei [23] lokal momentum korumalı algoritma yöntemini, Bhowmik ve Karakoç [24] kübik ve kuadratik B-splayn fonksiyonları kullanılarak Petrov-Galerkin yöntemini, Zeybek ve Karakoç [25] kuintik B-splayn kollakasyon yöntemini, Alharbi [26] hareketli ağ üzerinde sonlu fark yöntemini, Rouatbi ve ark. [27] korunumlu sonlu fark yöntemini, Oruç [28] delta şeklindeki baz fonksiyonlarını kullanarak kollakasyon yöntemini, Hammad [29] Bernstein kollakosyon yöntemini, Almatrafi ve ark. [30] hareketli ve düzgün ağlar üzerinde sonlu fark yöntemini, Karakoç ve ark. [31] sextic B-splayn subdomain sonlu elemanlar yöntemini, Al-Humedi [32] B-splayn en küçük kareler yöntemini, Behnood ve Shokri [33] Legendre spektral eleman yöntemini, Shallu ve Kukreja [34] kübik B-splayn kollakasyon ve Runge Kutta

(SSP-RK43) yöntemlerini, Kumari ve Kukreja [35] septik Hermite kollakasyon yöntemini, Karta [36] operatör ayırma tekniğiyle kuintik B-splayn kollakasyon yöntemini kullanarak GRLW denkleminin sayısal çözümünü elde etti. Ayrıca, son zamanlarda çok boyutlu RLW denkleminin sayısal çözümü zamana göre ikinci mertebeden geri türev formülü ve operatör parçalama tekniği üzerine kurulu yöntemlerde konuma göre sırasıyla yerel ağsız radyal ve Floater-Horman interpolasyonları kullanılarak elde edildi [37, 38]. Bu çalışmada, $\lim_{x\to a} u(x,t) \simeq 0$ ve $\lim_{x\to b} u(x,t) \simeq 0$ olacak şekilde $[a,b]$ konum aralığı belirlenerek (1) ile verilen GRLW denkleminin

$$u(x,0) = f(x),\ x \in [a,b] \tag{2}$$

başlangıç şartı ve

$$\left.\begin{array}{ll} u(a,t)=0, & u(b,t)=0 \\ u_x(a,t)=0, & u_x(b,t)=0 \end{array}\right\}, \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

sınır şartlarıyla kübik Hermite B-splayn kollakasyon yöntemi kullanılarak sayısal çözümü elde edildi.

**Kübik Hermite Splaynlar**

$[a,b]$ konum aralığının düzgün bir parçalanması $j = 1,2,3,...,N$ için $h = x_{j+1} - x_j$ olmak üzere $a = x_1 < x_2 < ... < x_N < x_{N+1} = b$ olsun. $j = 1,2,3,...N+1$ için $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ alt aralığı üzerinde sırasıyla tek ve çift indisli kübik Hermite B-splayn fonksiyonları

$$\boldsymbol{H}_{2j-1}(x) = \begin{cases} -2\left(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^3 + 3\left(\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^2, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ 2\left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right)^3 - 3\left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right)^2 + 1, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases},$$

$$\boldsymbol{H}_{2j}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{j-1})^3}{(x_j-x_{j-1})^2} - \frac{(x-x_{j-1})^2}{(x_j-x_{j-1})}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{(x-x_j)^3}{(x_{j+1}-x_j)^2} - 2\frac{(x-x_j)^2}{(x_{j+1}-x_j)} + (x-x_j), & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$$

olmak üzere $\{\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3, ..., \boldsymbol{H}_{2N+1}, \boldsymbol{H}_{2N+2}\}$ kümesi $[a,b]$ aralığında tanımlı kübik Hermite polinomları için bazdır [35, 39–41]. Böylece, (1) denklemiyle verilen GRLW denkleminin analitik ve yaklaşık çözüm fonksiyonları sırasıyla $u(x,t)$ ve $U(x,t)$ şeklinde gösterilmek üzere yaklaşık çözüm kübik Hermit B-splayn fonksiyonlarının lineer bileşimi olarak

$$u(x,t) \approx U(x,t) = \sum_{j=1}^{2N+2} \boldsymbol{H}_j(x)\, a_j(t) \tag{4}$$

şeklinde yazılabilir. $1 \le k \le N$ için $[a,b]$ aralığının $k$. alt aralığı $e^k = [x_k, x_{k+1}]$ tipik bir eleman olmak üzere $e^k$ tipik elemanı üzerinde sadece $\boldsymbol{H}_{2k-1}(x), \boldsymbol{H}_{2k}(x), \boldsymbol{H}_{2k+1}(x)$ ve $\boldsymbol{H}_{2k+2}(x)$ kübik Hermit

B-splayn fonksiyonları sıfırdan farklı olduğundan yaklaşık çözüm

$$U(x,t)=\sum_{j=2k-1}^{2k+2}\boldsymbol{H}_j(x)\,a_j(t)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda, $h\xi=x-x_k$ lokal koordinat dönüşümü $e^k=[x_k,x_{k+1}]$ tipik elemanına uygulandığında $[0,1]$ aralığına ve $\boldsymbol{H}_{2k-1}(x)$, $\boldsymbol{H}_{2k}(x)$, $\boldsymbol{H}_{2k+1}(x)$, $\boldsymbol{H}_{2k+2}(x)$ kübik Hermit B-splayn fonksiyonlarının tipik eleman üzerinde yer alan parçaları da $\xi$ lokal parametresine bağlı olarak sırasıyla $\mathcal{H}_1(\xi),\mathcal{H}_2(\xi),\mathcal{H}_3(\xi)$ ve $\mathcal{H}_4(\xi)$ fonksiyonlarına dönüşür. Böylece, $e^k$ tipik elemanı üzerinde lokal parametreye bağlı olarak yaklaşık çözüm fonksiyonu ve türevleri

$$U=\mathcal{H}_1(\xi)\,a_{2k-1}(t)+\mathcal{H}_2(\xi)\,a_{2k}(t)+\mathcal{H}_3(\xi)\,a_{2k+1}(t)+\mathcal{H}_4(\xi)\,a_{2k+2}(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left[\mathcal{A}_1(\xi)\,a_{2k-1}(t)+\mathcal{A}_2(\xi)\,a_{2k}(t)+\mathcal{A}_3(\xi)\,a_{2k+1}(t)+\mathcal{A}_4(\xi)\,a_{2k+2}(t)\right]/h \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\left[\mathcal{B}_1(\xi)\,a_{2k-1}(t)+\mathcal{B}_2(\xi)\,a_{2k}(t)+\mathcal{B}_3(\xi)\,a_{2k+1}(t)+\mathcal{B}_4(\xi)\,a_{2k+2}(t)\right]/h^2 \tag{7}$$

olarak elde edilir. Burada, $j=1(1)4$ için

$$\mathcal{H}_1(\xi)=2\xi^3-3\xi^2+1,\quad \mathcal{H}_2(\xi)=h\left(\xi^3-2\xi^2+\xi\right),$$
$$\mathcal{H}_3(\xi)=3\xi^2-2\xi^3,\qquad \mathcal{H}_4(\xi)=h\left(\xi^3-\xi^2\right)$$

olup $\mathcal{A}_j(\xi)=d\mathcal{H}_j(\xi)/d\xi$ ve $\mathcal{B}_j(\xi)=d\mathcal{A}_j(\xi)/d\xi$ şeklindedir. (4) denklemiyle verilen yaklaşık çözümü elde etmek için her bir zaman adımında bulunması gerekli $a_j(t)$ parametreleri $2N+2$ tanedir. Yaklaşık çözümü bulmak için kollakasyon yöntemi ve kollakasyon noktaları olarak da $\{x_j\}_{j=1}^{N+1}$ düğüm noktalarının seçilmesi durumunda $2N+2$ tane bilinmeyen ve $N+1$ tane denklemden oluşan bir nonhomojen cebirsel denklem sistemi elde edilir, ancak böyle bir cebirsel denklem sisteminin parametreye bağlı sonsuz çoklukta çözümü mevcuttur. Bir nonhomojen cebirsel denklem sisteminin tek çözümününün olması için bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı birbirine eşit ve katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır. Bu durumda, $2N+2$ tane denklem elde etmek için $2N+2$ tane kollakasyon noktasına ihtiyaç olduğu açıktır. Bu amaçla, $x_1=a$, $x_{N+1}=b$ noktaları ve ikinci dereceden Legendre polinomunun kökleri $\pm1/\sqrt{3}\in[-1,1]$ olmak üzere $k=1,2,...,N$ için $[x_k,x_{k+1}]$ alt aralığında

$$x_{ki}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}+(-1)^i\frac{h}{2\sqrt{3}},\qquad i=1,2 \tag{8}$$

şeklinde belirlenen iç noktalar kollakasyon noktası olarak alınarak $2N+2$ tane kollakasyon noktası elde edilir. (8) denklemiyle verilen iç kollakasyon noktalarına $h\xi=x-x_k$ lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa $[0,1]$ aralığında (shifted) ikinci dereceden Legendre polinomunun kökleri

$$\xi_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \xi_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

olmak üzere $h\xi_1=x_{k1}-x_k,\quad h\xi_2=x_{k2}-x_k$ dir.

**Sayısal Şema**

Bu bölümde, kübik Hermite B-splayn kollakasyon sonlu eleman yöntemi ile GRLW dekleminin sayısal çözümünü elde etmek için bir sayısal şema elde edildi. $[0,T]$ zaman aralığının düzgün bir parçalanması $n=0,1,2,...,M-1$ için $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ olmak üzere $0=t_0<t_1<...<t_{M-1}<t_M=T$ olsun. (1) ile verilen GRLW denklemi Crank-Nicolson yöntemine göre

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}+\frac{u_x^{n+1}+u_x^n}{2}+\alpha\frac{(u^pu_x)^{n+1}+(u^pu_x)^n}{2}-\mu\frac{u_{xx}^{n+1}-u_{xx}^n}{\Delta t}=0 \tag{9}$$

şeklinde ayrıklaştırıldıktan sonra $(u^pu_x)^{n+1}$ lineer olmayan terimi yerine

$$(u^pu_x)^{n+1}=(u^p)^n u_x^{n+1}+p\left(u^{p-1}\right)^n u_x^n u^{n+1}-p\left(u^p\right)^n u_x^n$$

Rubin-Graves [42,43] lineerleştirmesi yazılarak $n.$ ve $(n+1).$ zaman seviyelerine göre düzenlenirse

$$r_1=1+\frac{\Delta t}{2}p\alpha\left(u^{p-1}\right)^n u_x^n,\quad r_2=\frac{\Delta t}{2}\left[1+\alpha\left(u^p\right)^n\right],\quad r_3=\frac{\Delta t}{2}\left[-1+\alpha\left(p-1\right)\left(u^p\right)^n\right]$$

olmak üzere

$$r_1u^{n+1}+r_2u_x^{n+1}-\mu u_{xx}^{n+1}=u^n+r_3u_x^n-\mu u_{xx}^n \tag{10}$$

denklemi elde edilir. (10) denkleminde $u$ ve türevlerinin yerine (4) denklemiyle verilen $U$ yaklaşım fonksiyonu ve türevleri yazıldıktan sonra elde edilen denklem $\forall x\in[a,b]$ aralığında geçerli olduğundan $k=1,2,...,N$ için $[x_k,x_{k+1}]\subset[a,b]$ tipik alt aralığında da geçerlidir. Bu durumda, (10) denklemine $h\xi=x-x_k$ lokal koordinat dönüşümü uygulanarak $U$, $U_x$, $U_{xx}$ yaklaşımları yerine (5), (6), (7) denklemleri ile verilen $\xi$ lokal parametresine bağlı değerleri yazılırsa

$$\begin{aligned}
&r_1\left[\mathcal{H}_1(\xi)\,a_{2k-1}^{n+1}+\mathcal{H}_2(\xi)\,a_{2k}^{n+1}+\mathcal{H}_3(\xi)\,a_{2k+1}^{n+1}+\mathcal{H}_4(\xi)\,a_{2k+2}^{n+1}\right]\\
&+\frac{r_2}{h}\left[\mathcal{A}_1(\xi)\,a_{2k-1}^{n+1}+\mathcal{A}_2(\xi)\,a_{2k}^{n+1}+\mathcal{A}_3(\xi)\,a_{2k+1}^{n+1}+\mathcal{A}_4(\xi)\,a_{2k+2}^{n+1}\right]\\
&-\frac{\mu}{h^2}\left[\mathcal{B}_1(\xi)\,a_{2k-1}^{n+1}+\mathcal{B}_2(\xi)\,a_{2k}^{n+1}+\mathcal{B}_3(\xi)\,a_{2k+1}^{n+1}+\mathcal{B}_4(\xi)\,a_{2k+2}^{n+1}\right]\\
&=\mathcal{H}_1(\xi)\,a_{2k-1}^{n}+\mathcal{H}_2(\xi)\,a_{2k}^{n}+\mathcal{H}_3(\xi)\,a_{2k+1}^{n}+\mathcal{H}_4(\xi)\,a_{2k+2}^{n}\\
&+\frac{r_3}{h}\left[\mathcal{A}_1(\xi)\,a_{2k-1}^{n}+\mathcal{A}_2(\xi)\,a_{2k}^{n}+\mathcal{A}_3(\xi)\,a_{2k+1}^{n}+\mathcal{A}_4(\xi)\,a_{2k+2}^{n}\right]\\
&-\frac{\mu}{h^2}\left[\mathcal{B}_1(\xi)\,a_{2k-1}^{n}+\mathcal{B}_2(\xi)\,a_{2k}^{n}+\mathcal{B}_3(\xi)\,a_{2k+1}^{n}+\mathcal{B}_4(\xi)\,a_{2k+2}^{n}\right]
\end{aligned} \tag{11}$$

denklemi bulunur. $j=1,2,3,4$, $i=1,2$ için $\mathcal{H}_j(\xi_i)=\mathcal{H}_{ji}$, $\mathcal{A}_j(\xi_i)=\mathcal{A}_{ji}$, $\mathcal{B}_j(\xi_i)=\mathcal{B}_{ji}$ gösterimi kullanılarak (11) denkleminin sol ve sağ tarafları sırasıyla $a_{2k-1}^{n+1}$, $a_{2k}^{n+1}$, $a_{2k+1}^{n+1}$, $a_{2k+2}^{n+1}$ ve $a_{2k-1}^{n}$, $a_{2k}^{n}$, $a_{2k+1}^{n}$, $a_{2k+2}^{n}$ parametrelerine göre düzenlenirse katsayıları

$$\alpha_{ji}=r_1\mathcal{H}_{ji}+\frac{r_2}{h}\mathcal{A}_{ji}-\frac{\mu}{h^2}\mathcal{B}_{ji},\quad \beta_{ji}=\mathcal{H}_{ji}+\frac{r_3}{h}\mathcal{A}_{ji}-\frac{\mu}{h^2}\mathcal{B}_{ji},\quad j=1,2,3,4,\ i=1,2$$

olmak üzere

$$\alpha_{1i}a_{2k-1}^{n+1}+\alpha_{2i}a_{2k}^{n+1}+\alpha_{3i}a_{2k+1}^{n+1}+\alpha_{4i}a_{2k+2}^{n+1}=\beta_{1i}a_{2k-1}^{n}+\beta_{2i}a_{2k}^{n}+\beta_{3i}a_{2k+1}^{n}+\beta_{4i}a_{2k+2}^{n},$$
$$k=1,2,...,N,\ i=1,2 \tag{12}$$

şeklinde $2N$ tane denklemden ve $2N+2$ tane bilinmeyenden oluşan bir nonhomojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. (3) denklemi ile verilen $U(a,t)=0$ sol sınır şartından

$$\boldsymbol{H}_1(a)\,a_1(t)+\boldsymbol{H}_2(a)\,a_2(t)+\boldsymbol{H}_3(a)\,a_3(t)+\boldsymbol{H}_4(a)\,a_4(t)=0 \tag{13}$$

yazılır. $\boldsymbol{H}_2(a)=\boldsymbol{H}_3(a)=\boldsymbol{H}_4(a)=0$ ve $\boldsymbol{H}_1(a)=1$ olduğundan (13) denkleminden her $t$ için $a_1(t)=0$ olarak bulunur. Benzer şekilde, (3) denklemi ile verilen $U(b,t)=0$ sağ sınır şartından

$$\boldsymbol{H}_{2N-1}(b)\,a_{2N-1}(t)+\boldsymbol{H}_{2N}(b)\,a_{2N}(t)+\boldsymbol{H}_{2N+1}(b)\,a_{2N+1}(t)+\boldsymbol{H}_{2N+2}(b)\,a_{2N+2}(t)=0 \tag{14}$$

yazılır. $\boldsymbol{H}_{2N-1}(x_{N+1})=\boldsymbol{H}_{2N}(x_{N+1})=\boldsymbol{H}_{2N+2}(x_{N+1})=0$ ve $\boldsymbol{H}_{2N+1}(x_{N+1})=1$ olduğundan (14) denkleminden her $t$ için $a_{2N+1}(t)=0$ olarak bulunur. Bulunan parametreler (12) denklemi ile verilen nonhomojen lineer cebirsel denklem sisteminde yerine yazılırsa $2N$ tane denklemden ve $2N$ tane bilinmeyenden oluşan bir nonhomojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu nonhomojen lineer cebirsel denklem sistemi matris formunda

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
\alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & & & & & & & & \\
\alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & & & & & & & & \\
 & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & & & & & & \\
 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & & & & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & & & & & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \\
 & & & & & & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \\
 & & & & & & & & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{41} \\
 & & & & & & & & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{42}
\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}
\beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} & & & & & & & & \\
\beta_{22} & \beta_{32} & \beta_{42} & & & & & & & & \\
 & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} & & & & & & \\
 & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & \beta_{42} & & & & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & & & & & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} & \\
 & & & & & & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & \beta_{42} & \\
 & & & & & & & & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{41} \\
 & & & & & & & & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{42}
\end{bmatrix}$$

ve $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{2N-1} & a_{2N} & a_{2N+2} \end{bmatrix}^T$ olmak üzere

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^{n+1}=\mathbf{B}\mathbf{X}^{n},\ n=0,1,2,...,M-1 \tag{15}$$

şeklinde yazılır. Burada, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri $2N \times 2N$ tipinde 5 li bant matrislerdir, $\mathbf{X}$ matrisi $2N \times 1$ tipinde kolon matrisidir. (15) denkleminden işlemler ardışık olarak tekrarlanarak istenilen zaman adımındaki bilinmeyenler bulunur. Ardışık işlemlerin başlayabilmesi için gerekli $\mathbf{X}^0$ kolon matrisi, (2) denklemiyle verilen $U(x,0) = f(x)$ başlangıç şartından hesaplanır. Bu durumda, $i = 1, 2$ ve $k = 1(1)N$ için

$$U(x_{ki}, 0) = f(x_{ki}) \Rightarrow \boldsymbol{H}_{1i} a_{2k-1} + \boldsymbol{H}_{2i} a_{2k} + \boldsymbol{H}_{3i} a_{2k+1} + \boldsymbol{H}_{4i} a_{2k+2} = f(x_{ki}) \tag{16}$$

şeklinde $2N + 2$ tane bilinmeyen ve $2N$ tane denklemden oluşan bir nonhomojen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Sınır şartlarından her $t \in [0, T]$ için $a_1(t) = 0$ ve $a_{2N+1}(t) = 0$ olduğundan (16) denklem sisteminde bu bilinmeyenlerin değerleri yerine yazılarak denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının $2N$ tane olması sağlanır. Elde edilen denklem sistemi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}
\boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{31} & \boldsymbol{H}_{41} & & & & & & & & \\
\boldsymbol{H}_{22} & \boldsymbol{H}_{32} & \boldsymbol{H}_{42} & & & & & & & & \\
 & \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{31} & \boldsymbol{H}_{41} & & & & & & \\
 & \boldsymbol{H}_{12} & \boldsymbol{H}_{22} & \boldsymbol{H}_{32} & \boldsymbol{H}_{42} & & & & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & & \\
 & & & & & & \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{31} & \boldsymbol{H}_{41} & \\
 & & & & & & \boldsymbol{H}_{12} & \boldsymbol{H}_{22} & \boldsymbol{H}_{32} & \boldsymbol{H}_{42} & \\
 & & & & & & & & \boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{41} \\
 & & & & & & & & \boldsymbol{H}_{12} & \boldsymbol{H}_{22} & \boldsymbol{H}_{42}
\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} a_2(0) & a_3(0) & a_4(0) & a_5(0) & \cdots & a_{2N-1}(0) & a_{2N}(0) & a_{2N+2}(0) \end{bmatrix}^T$$

ve

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_{11}) & f(x_{12}) & f(x_{21}) & f(x_{22}) & \cdots & f(x_{N-1,1}) & f(x_{N-1,2}) & f(x_{N1}) & f(x_{N2}) \end{bmatrix}^T$$

olmak üzere $\mathbf{CX}^0 = \mathbf{F}$ matris formunda yazılır. Bu denklem sisteminin çözümü olarak $\mathbf{X}^0$ elde edilir. Böylece, kübik Hermite B-splayn kollakasyon yönteminin sayısal şemasının türevli sınır şartları kullanılmadan kolaylıkla elde edildiği görülmektedir.

**Kararlılık Analizi**

Bu bölümde, sunulan şemanın von-Neuman yöntemiyle lineer kararlılık analizi yapıldı. (9) denklemindeki $(n+1)$. ve $n$. zaman adımlarındaki $u^p u_x$ lineer olmayan terimi yerine $W = max|u^p|$ şeklinde bir lokal sabit alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(1 + \alpha W) u_x^{n+1} - \mu u_{xx}^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{2}(1 + \alpha W) u_x^n - \mu u_{xx}^n$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $u$ çözümü yerine $U$ yaklaşık çözümü yazılırsa $r = \mu/h^2$, $z = \Delta t(1 + \alpha W)/(2h)$ olmak üzere katsayıları $j = 1(1)4$ için $\alpha_j = \mathcal{H}_j - r\mathcal{B}_j + z\mathcal{A}_j$, $\beta_j = \mathcal{H}_j - r\mathcal{B}_j - z\mathcal{A}_j$ olan

$$\alpha_1 a_{2k-1}^{n+1} + \alpha_2 a_{2k}^{n+1} + \alpha_3 a_{2k+1}^{n+1} + \alpha_4 a_{2k+2}^{n+1} = \beta_1 a_{2k-1}^n + \beta_2 a_{2k}^n + \beta_3 a_{2k+1}^n + \beta_4 a_{2k+2}^n, \quad k = 1, 2, ..., N$$

şeklinde lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. $\delta$ büyüme çarpanı ve $\theta = \eta h$ olmak üzere Fourier kararlılık analizine göre bu denklemde $a_{2k}^n = \delta^n e^{i2k\theta}$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ yazıldıktan sonra $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ Euler eşitliğinden yararlanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P = \beta_4 \cos 3\theta + \beta_3 \cos 2\theta + \beta_2 \cos\theta + \beta_1, \quad Q = \beta_4 \sin 3\theta + \beta_3 \sin 2\theta + \beta_2 \sin\theta$$
$$R = \alpha_4 \cos 3\theta + \alpha_3 \cos 2\theta + \alpha_2 \cos\theta + \alpha_1, \quad S = \alpha_4 \sin 3\theta + \alpha_3 \sin 2\theta + \alpha_2 \sin\theta$$

olmak üzere büyüme çarpanı

$$\delta = \frac{P + iQ}{R + iS}$$

olarak elde edilir. $|\delta| \leq 1$ olduğundan sunulan şema şartsız kararlıdır.

**Test Problemleri**

Bu bölümde, sunulan şema bazı test problerine uygulanarak yönteminin etkinliği ve doğruluğu araştırıldı. Analitik çözümü bilinen test problemleri için $(x_j, t_n)$ düğüm noktasında analitik ve yaklaşık çözümler sırasıyla $u_j^n$ ve $U_j^n$ olmak üzere

$$L_2 = \|u - U\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^{N} \left|u_j^n - U_j^n\right|^2}, \qquad L_\infty = \|u - U\|_\infty = \max_j \left|u_j^n - U_j^n\right|$$

şeklinde tanımlı hata normları çeşitli zaman ve konum adım uzunlukları için hesaplanarak tablolar halinde verildi. Ayrıca, Danaf ve ark. [21] tarafından

$$I_1 = \int_a^b u dx,\ I_2 = \int_a^b \left(u^2 + \mu u_x^2\right) dx,\ I_3 = \int_a^b \left[u^{p+2} - \frac{(p+2)\mu}{2p} u_x^2\right] dx$$

olarak tanımlanan invaryantların yaklaşık değerleri

$$I_1^A = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(U_j^n + U_{j+1}^n\right)$$
$$I_2^A = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(\left(U_j^n\right)^2 + \mu \left((U_x)_j^n\right)^2 + \left(U_{j+1}^n\right)^2 + \mu \left((U_x)_{j+1}^n\right)^2\right)$$
$$I_3^A = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{N} \left[\left(U_j^n\right)^{p+2} - \frac{(p+2)\,\mu}{2p} \left((U_x)_j^n\right)^2 + \left(U_{j+1}^n\right)^{p+2} - \frac{(p+2)\,\mu}{2p} \left((U_x)_{j+1}^n\right)^2\right]$$

şeklinde yamuk yöntemiyle elde edildi ve $i = 1, 2, 3$ için $\Delta I_i = \left|I_i\left(0\right) - I_i^A\left(T\right)\right|$ şeklinde invaryantların mutlak değişim miktarları çeşitli zaman ve konum adım uzunlukları için hesaplanak tablolar halinde sunuldu. Aynı adım uzunlukları seçilerek invaryantlar, invaryantlardaki mutlak değişim miktarları ve hata normları literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırıldı. Test problemlerinin doğru fiziksel davranışları sergilediğini görmek için çeşitli grafikler çizildi.

**Problem 1.** Bir Soliter Dalga

Birinci problem olarak (1) ile verilen GRLW denkleminin

$$u(x,0) = \sqrt[p]{Q \sec h^2 \left(K\left(x - \widehat{x}_0\right)\right)}$$

başlangıç şartıyla sayısal çözümü $[0,T]$ zaman aralığında elde edildi. Bu problemin analitik çözümü

$$u(x,t) = \sqrt[p]{Q \sec h^2 \left(K\left(x - vt - \widehat{x}_0\right)\right)}$$

şeklindedir. Burada, $Q = c(p+2)/(2p)$, $K = p\sqrt{c/\left[4\mu\left(c+1\right)\right]}$ dir. Problem $[0,T]$ zaman aralığında $A = \sqrt[p]{Q}$ genliğiyle ve $v = c+1$ hızıyla sağa doğru ilerleyen bir soliter dalganın hareketini temsil etmektedir [12, 26, 44]. Başlangıç anında dalganın genliği $\widehat{x}_0$ apsisli noktadadır. $\mu = 1$, $\widehat{x}_0 = 40$ olmak üzere çeşitli $p$ ve $c$ değerleri için problemin sunulan şema ile sayısal çözümleri elde edildi.

**Durum 1:** Bu durumda $p = 3$ olmak üzere çeşitli $c$ değerleri için sunulan şema ile elde edilen sayısal çözümün hata normları ve invaryantları hesaplandı. İlk olarak $c = 0.1$ ve çözüm bölgesi $[0,80] \times [0,T]$ olarak alındı. Sunulan şemanın konum adımına göre yakınsaklığını görmek için $T =$ 1,5,10 zamanlarında $\Delta t = 0.01$ ve $h =$ 2,1,0.5,0.25,0.125,0.0625 adım uzunlukları için hata normları ve invaryantlar Tablo 1'de ve $T = 10$ zamanında invaryantların mutlak değişim miktarları Tablo 2'de verildi. Tablo 1 ve Tablo 2'den $h$ küçüldükçe hata normlarının küçüldüğü, invaryantların analitik değerleriyle uyumlu ve zaman ilerledikçe invaryantlarının oldukça iyi korunduğu görüldü. Sonra, sunulan şemanın zaman adımına göre yakınsaklığını görmek için $T =$ 1,5,10 zamanlarında $h = 0.1$ ve $\Delta t =$ 0.1,0.05,0.025,0.0125,0.00625 adım uzunlukları için hata normları ve invaryantlar Tablo 3'de ve $T = 10$ zamanında invaryantların mutlak değişim miktarları Tablo 4'de verildi. Tablo 3 ve Tablo 4'den $\Delta t$ küçüldükçe hata normlarının küçüldüğü, invaryantların analitik değerleriyle uyumlu ve yeterince iyi bir şekilde korunduğu görüldü. Tablo 5'de $T = 1$ ve $T = 5$ zamanlarında $h = \Delta t = 0.1$ adım uzunlukları için invaryantlar ve hata normları hesaplanarak [8] ve [21] çalışmalarıyla karşılaştırıldı. Tablo 5'den sunulan şemayla elde edilen sonuçların hata normlarının [21] çalışmasından daha küçük, [8] çalışmasıyla hemen hemen aynı olduğu görüldü. Ayrıca, $I_1$ve $I_2$ invaryantların her iki çalışmayla, $I_3$ invaryantının [21] çalışmasıyla ve bütün invaryantların analitik değerleriyle uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 6' da $c = 0.3$ olmak üzere $[0,100] \times [0,T]$ çözüm bölgesinde $T = 10$ zamanında $\Delta t = 0.01$, $h =$ 0.1,0.2 adım uzunlukları için invaryantların ve hata normlarının literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması yapıldı. Tablo 6' dan sunulan şemanın hata normlarının [7, 18, 19] çalışmalarından daha küçük ve [35] M1(septik Hermite B-splayn kollokasyon yöntemi) çalışmasına oldukça yakın olduğu görüldü. $h = 0.1$ ve $h = 0.2$ için invaryantların mutlak değişim miktarları sırasıyla $\Delta I_1 = 9.0347813675e{-}9$, $\Delta I_2 = 7.2839801080e{-}8$, $\Delta I_3 = 1.9273551406e{-}7$ ve $\Delta I_1 = 7.5128849808e{-}9$, $\Delta I_2 = 3.3948348463e{-}6$, $\Delta I_3 = 2.4093242293e{-}6$ olarak hesaplandı. Böylece, invaryantların analitik değerleriyle uyumlu olarak [0,10] zaman aralığında sunulan şema ile korunduğu görüldü. Tablo 7'de $c = 1.2$ olmak üzere $[0,100] \times [0,T]$ çözüm bölgesinde $T = 10$ zamanında $h = 0.1, \Delta t = 0.025$ adım uzunlukları için sunulan şemanın hata normlarının ve invaryantlarının literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılması yapıldı. Ayrıca, tabloda $\Delta t = 0.01$ adım uzunluğu için sunulan şemanın hata normları ve invaryantları verildi. Tablo 7'den sunulan şemanın hata normlarının $\Delta t = 0.025$ için diğer çalışmalarla uyumlu ve $\Delta t = 0.01$ için daha küçük olduğu görüldü.

Şekil 1' de $c = 0.1$, 0.3, 1.2 olmak üzere $T = 0$ başlangıç zamanı, $T = 0$ bitiş zamanı ve artım miktarı 2 seçilerek yani $T = 0(2)10$ (soldan sağa) zamanlarında $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$ için tek dalganın sunulan şemayla elde edilen sayısal (- -) ve analitik (–) çözümlerinin grafikleri (solda) ve $T = 10$ zamanında

***Tablo 1.*** *Problem 1'in $p = 3$, $c = 0.1$ için $x \in [0, 80]$ aralığında $T = 1, 5, 10$ zamanlarında invaryantları ve hata normları: $\Delta t = 0.01$, $h = 2, 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625$*

| $T$ | $h$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $L_2$ | $L_\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4.0623505710 | 1.1344400265 | 0.0157457217 | $9.35458e-4$ | $5.50307e-4$ |
| | 1 | 4.0625682302 | 1.1339223682 | 0.0165189108 | $7.50770e-5$ | $4.41918e-5$ |
| | 0.5 | 4.0625682481 | 1.1338777202 | 0.0165345614 | $5.47161e-6$ | $3.93282e-6$ |
| | 0.25 | 4.0625682834 | 1.1338747374 | 0.0165355997 | $8.99327e-7$ | $4.51703e-7$ |
| | 0.125 | 4.0625682932 | 1.1338745477 | 0.0165356658 | $7.14505e-7$ | $3.34371e-7$ |
| | 0.0625 | 4.0625682957 | 1.1338745358 | 0.0165356699 | $7.05821e-7$ | $3.27131e-7$ |
| 5 | 2 | 4.0623421938 | 1.1347123393 | 0.0157170471 | $2.73324e-3$ | $1.17430e-3$ |
| | 1 | 4.0625213679 | 1.1339792356 | 0.0164643759 | $2.11526e-4$ | $1.14140e-4$ |
| | 0.5 | 4.0625238307 | 1.1338821803 | 0.0165307103 | $1.67644e-5$ | $9.10225e-6$ |
| | 0.25 | 4.0625239724 | 1.1338750302 | 0.0165353516 | $4.22598e-6$ | $2.09430e-6$ |
| | 0.125 | 4.0625239987 | 1.1338745644 | 0.0165356498 | $3.53552e-6$ | $1.63730e-6$ |
| | 0.0625 | 4.0625240052 | 1.1338745350 | 0.0165356686 | $3.49409e-6$ | $1.60858e-6$ |
| 10 | 2 | 4.0619506380 | 1.1347357008 | 0.0153078295 | $4.53113e-3$ | $2.14414e-3$ |
| | 1 | 4.0622247882 | 1.1339810345 | 0.0164632828 | $3.45480e-4$ | $1.61480e-4$ |
| | 0.5 | 4.0622285093 | 1.1338825238 | 0.0165304120 | $2.87144e-5$ | $1.38094e-5$ |
| | 0.25 | 4.0622290597 | 1.1338750359 | 0.0165353289 | $8.14916e-6$ | $3.72794e-6$ |
| | 0.125 | 4.0622291905 | 1.1338745432 | 0.0165356495 | $6.92949e-6$ | $3.08769e-6$ |
| | 0.0625 | 4.0622292231 | 1.1338745120 | 0.0165356698 | $6.85435e-6$ | $3.04751e-6$ |
| | Analitik | 4.0625697731 | 1.1338745353 | 0.0165356703 | | |

***Tablo 2.*** *Problem 1'in $p = 3$, $c = 0.1$ için $x \in [0, 80]$ aralığında $T = 10$ zamanında invaryantların mutlak değişim miktarları: $\Delta t = 0.01$, $h = 2, 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625$*

| $h$ | $\Delta I_1$ | $\Delta I_2$ | $\Delta I_3$ |
|---|---|---|---|
| 2 | $6.1913509676e-4$ | $8.6116556762e-4$ | $1.2278408458e-3$ |
| 1 | $3.4498488864e-4$ | $1.0649922815e-4$ | $7.2387500486e-5$ |
| 0.5 | $3.4126375494e-4$ | $7.9885099180e-6$ | $5.2583055213e-6$ |
| 0.25 | $3.4071340050e-4$ | $5.0061191059e-7$ | $3.4139741927e-7$ |
| 0.125 | $3.4058258184e-4$ | $7.9524518082e-9$ | $2.0798978095e-8$ |
| 0.0625 | $3.4054998198e-4$ | $2.3237124225e-8$ | $5.4438089453e-10$ |

mutlak hatanın grafikleri (sağda) verildi. Şekil 1' den sunulan şemayla elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözümlerle üst üste geldiği, $c$ büyüdükçe dalganın genliğinin ve mutlak hatanın büyüdüğü görüldü.

**Durum 2:** Bu durumda, çözüm bölgesi $[0, 100] \times [0, T]$ ve $p = 4$ olmak üzere çeşitli $c$ değerleri için sunulan şema ile elde edilen sayısal çözümün hata normları ve invaryantları hesaplandı. $c = 4/3$ olmak üzere $T = 10$ zamanında çeşitli konum ve zaman adım uzunlukları için invaryantların ve hata normlarının literatürde mevcut çalışmalarla karşılaştırması Tablo 8'de verildi. Tablo 8'den sunulan şemanın hata normlarının [31] çalışmasından daha küçük, diğer çalışmalarla uyumlu veya daha büyük olduğu görüldü. $T = 10$ da invaryantların mutlak değişim miktarları $\Delta t = 0.01,\ h = 0.1$ için $I_1 = 9.2570218158e-10$, $\Delta I_2 = 9.6093984628e-5$, $\Delta I_3 = 1.1417579886e-4$ olarak hesaplandı. Böylece, invaryantların mutlak değişim miktarlarından sunulan şemanın invaryantları yeterince iyi koruduğu görülmektedir.
$c = 0.3$ olmak üzere $(x, t) \in [0, 100] \times [0, T]$ çözüm bölgesinde $T = 10$ zamanında $h = 0.4$,0.2,0.1, $\Delta t = 0.01$ adım uzunlukları için invaryantların ve hata normlarının diğer araştırmacılarla karşılaştırması Tablo 9'da verildi. Tablo 9'dan sunulan şemanın hata normlarınının karşılaştırılan çalışmaların hata normlarına çok yakın olarak elde edildiği, $h$ küçüldükçe sunulan şemanın hata normlarınının küçüldüğü

***Tablo 3.*** *Problem 1'in $p = 3$, $c = 0.1$ için $x \in [0, 80]$ aralığında $T = 1, 5, 10$ zamanlarında invaryantları ve hata normları: $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$*

| $T$ | $\Delta t$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $L_2$ | $L_\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 4.0625682941 | 1.1338742644 | 0.0165355542 | $7.04680e-5$ | $3.26718e-5$ |
| | 0.05 | 4.0625682944 | 1.1338745056 | 0.0165356545 | $1.76320e-5$ | $8.17165e-6$ |
| | 0.025 | 4.0625682944 | 1.1338745361 | 0.0165356668 | $4.41143e-6$ | $2.04502e-6$ |
| | 0.0125 | 4.0625682944 | 1.1338745399 | 0.0165356683 | $1.10568e-6$ | $5.13565e-7$ |
| | 0.00625 | 4.0625682944 | 1.1338745404 | 0.0165356685 | $2.79286e-7$ | $1.30754e-7$ |
| 5 | 0.1 | 4.0625239907 | 1.1338730624 | 0.0165351538 | $3.49067e-4$ | $1.60376e-4$ |
| | 0.05 | 4.0625239991 | 1.1338743626 | 0.0165355995 | $8.73119e-5$ | $4.01450e-5$ |
| | 0.025 | 4.0625240012 | 1.1338745243 | 0.0165356544 | $2.18408e-5$ | $1.00486e-5$ |
| | 0.0125 | 4.0625240018 | 1.1338745445 | 0.0165356612 | $5.47337e-6$ | $2.52178e-6$ |
| | 0.00625 | 4.0625240019 | 1.1338745470 | 0.0165356620 | $1.38187e-6$ | $6.39875e-7$ |
| 10 | 0.1 | 4.0622290843 | 1.1338711805 | 0.0165349321 | $6.85306e-4$ | $3.04132e-4$ |
| | 0.05 | 4.0622291766 | 1.1338741121 | 0.0165355735 | $1.71350e-4$ | $7.61202e-5$ |
| | 0.025 | 4.0622291997 | 1.1338744753 | 0.0165356519 | $4.28511e-5$ | $1.90471e-5$ |
| | 0.0125 | 4.0622292055 | 1.1338745205 | 0.0165356616 | $1.07354e-5$ | $4.77511e-6$ |
| | 0.00625 | 4.0622292069 | 1.1338745261 | 0.0165356628 | $2.70819e-6$ | $1.20695e-6$ |
| | Analitik | 4.0625697731 | 1.1338745353 | 0.0165356703 | | |

***Tablo 4.*** *Problem 1'in $p = 3$, $c = 0.1$ için $x \in [0, 80]$ aralığında $T = 10$ zamanında invaryantların mutlak değişim miktarları: $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$*

| $\Delta t$ | $\Delta I_1$ | $\Delta I_2$ | $\Delta I_3$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | $3.4068877756e-4$ | $3.3547300697e-6$ | $7.3821351512e-7$ |
| 0.05 | $3.4059646329e-4$ | $4.2315406135e-7$ | $9.6769373046e-8$ |
| 0.025 | $3.4057339158e-4$ | $5.9959863297e-8$ | $1.8420468810e-8$ |
| 0.0125 | $3.4056762446e-4$ | $1.4810491500e-8$ | $8.7278913923e-9$ |
| 0.00625 | $3.4056618178e-4$ | $9.1935918878e-9$ | $7.5132968042e-9$ |

***Tablo 5.*** *Problem 1'in $p = 3$, $c = 0.1$ için $x \in [0, 80]$ aralığında $T = 1, 5$ zamanlarında invaryantlarının ve hata normlarının karşılaştırması: $h = \Delta t = 0.1$*

| $T$ | | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $L_2$ | $L_\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | [8] | 4.06257 | 1.13382 | 0.0929511 | $6.87621e-5$ | $3.87296e-5$ |
| | [21] | 4.06257 | 1.13382 | 0.0165781 | $8.15023e-5$ | $5.10793e-5$ |
| | Sunulan | 4.062568 | 1.133874 | 0.0165355 | $7.04680e-5$ | $3.26718e-5$ |
| 5 | [8] | 4.06252 | 1.13382 | 0.0929505 | $2.83131e-4$ | $1.55714e-4$ |
| | [21] | 4.06252 | 1.13382 | 0.0165782 | $3.63674e-4$ | $2.06037e-4$ |
| | Sunulan | 4.062524 | 1.13387 | 0.0165352 | $3.49067e-4$ | $1.60376e-4$ |
| | Analitik | 4.062569 | 1.133874 | 0.0165356 | | |

ve invaryantların analitik değerleriyle uyumlu olduğu görüldü.

Şekil 2' de $c = 4/3, 0.3$ olmak üzere $T = 0(2)10$ (soldan sağa) zamanlarında $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$ için tek dalganın sunulan şemayla elde edilen sayısal (- -) ve analitik (–) çözümlerinin grafikleri (solda) ve $T = 10$ zamanında mutlak hata grafikleri (sağda) verildi. Şekil 2' den sunulan şemayla elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözümlerle üst üste geldiği ve $c$ küçüldükçe mutlak hatanın da küçüldüğü görüldü.

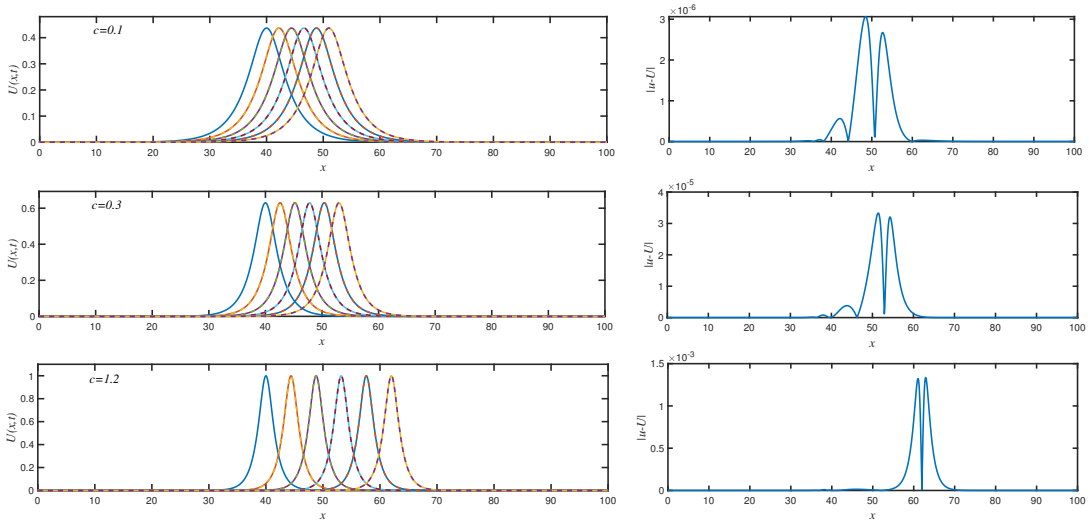
**Durum 3:** Bu durumda, çözüm bölgesi $[0, 100] \times [0, T]$, $p = 6, 8, 10$ ve $c = 0.03$ olmak üzere sunulan şema ile elde edilen sayısal çözümün hata normları ve invaryantları hesaplandı. $T = 20$ zamanında $\Delta t = 0.01, 0.025$, $h = 0.1, 0.2$ için hata nornlarının karşılaştırılması Tablo 10' da verildi. Tablo 10' dan

***Tablo 6.*** *Problem 1'in $p = 3$, $c = 0.3$ için $x \in [0, 100]$ aralığında $T = 10$ zamanında invaryantlarının ve hata normlarının karşılaştırılması: $\Delta t = 0.01$*

| | $h$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $L_2$ | $L_\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [7] | 0.1 | 3.67755 | 1.56574 | 0.226837 | $7.1976e-5$ | $3.7723e-5$ |
| [18] | | 3.6776069 | 1.5657620 | 0.2268446 | $7.8514e-5$ | $3.6501e-5$ |
| [19] | | 3.6776072 | 1.5657608 | 0.2268574 | $1.9133e-4$ | $7.7993e-5$ |
| [36] | | 3.67755181 | 1.56573997 | 0.22683942 | $1.383e-5$ | $6.89e-6$ |
| Sunulan | | 3.6775518 | 1.5657410 | 0.0861156 | $6.9528e-5$ | $3.3314e-5$ |
| [25] | 0.2 | 3.67753 | 1.56573 | 0.22684 | $4.00e-5$ | $2.03e-5$ |
| [35]M-I | | 3.6775518 | 1.5657407 | 0.2268388 | $6.900e-5$ | $3.304e-5$ |
| [35]M-II | | 3.6775518 | 1.5657406 | 0.2268384 | $2.992e-7$ | $1.528e-7$ |
| Sunulan | | 3.6775518 | 1.5657443 | 0.0861133 | $7.7370e-5$ | $3.7378e-5$ |
| Analitik | | 3.6775518 | 1.5657409 | 0.0861157 | | |

***Tablo 7.*** *Problem 1'in $p = 3$, $c = 1.2$ için $x \in [0, 100]$ aralığında $T = 10$ zamanında invaryantlarının ve hata normlarının karşılaştırılması: $h = 0.1$*

| | $\Delta t$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $L_2$ | $L_\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [7] | 0.025 | 3.79713 | 2.88123 | 0.972243 | $7.7675e-3$ | $4.7088e-3$ |
| [19] | | 3.8016702 | 2.8880662 | 0.9792942 | $1.3291e-2$ | $8.4781e-3$ |
| [18] | | 3.7971333 | 2.8810899 | 0.9731285 | $7.7782e-3$ | $4.4419e-3$ |
| [24] | | 3.797282 | 2.881293 | 0.973446 | $6.1280e-3$ | $3.7221e-3$ |
| [31] | | 3.797186 | 2.881254 | 0.973157 | $1.1026e-2$ | $6.355e-3$ |
| [36] | | 3.797127 | 2.881036 | 0.973122 | $5.532e-3$ | $3.190e-3$ |
| Sunulan | | 3.79712709 | 2.8807985 | 0.8790972 | $1.5233e-2$ | $8.7479e-3$ |
| Sunulan | 0.01 | 3.79712709 | 2.8812015 | 0.8795015 | $2.3332e-3$ | $1.3359e-3$ |
| Analitik | | 3.79712709 | 2.8812249 | 0.8795318 | | |




***Şekil 1.*** *Problem 1'in $c = 0.1, 0.3, 1.2$ olmak üzere $T = 0(2)10$ zamanlarında sunulan şemayla sayısal (- -), analitik (–) çözümleri ve $T = 10$ zamanında mutlak hata grafikleri: $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$*

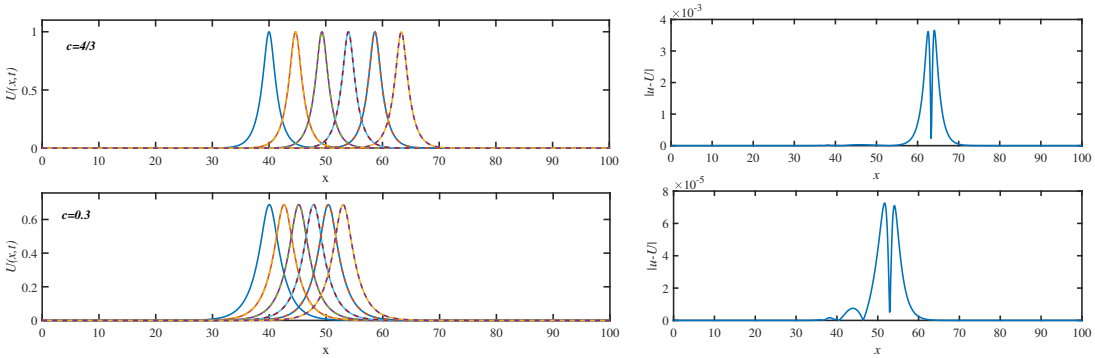
sunulan sayısal şemanın hata normlarının daha küçük olduğu görüldü. Şekil 3' de $c = 0.03$, $p = 6, 8, 10$ olmak üzere $h = 0.2$, $\Delta t = 0.01$ için $T = 0(4)20$ zamanlarında tek dalganın sunulan şemayla elde edilen sayısal (- -) ve analitik (–) çözümlerinin grafikleri (solda) ve $T = 20$ zamanında mutlak hatanın grafikleri (sağda) verildi. Şekil 3' den sunulan şemayla elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözümlerle

***Tablo 8.*** *Problem 1'in $p = 4$, $c = 4/3$ için $T = 10$ zamanında invaryantlarının ve hata normlarının karşılaştırılması*

| | $h$ | $\Delta t$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $L_2$ | $L_\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [35]M-I | 0.2 | 0.025 | 3.4686561 | 2.6715658 | 0.7291334 | $5.9454e-3$ | $3.6059e-3$ |
| [35]M-II | | | 3.4686561 | 2.6715563 | 0.7291003 | $5.8890e-4$ | $3.6881e-4$ |
| Sunulan | | | 3.4686554 | 2.6701870 | 0.5919373 | $4.2536e-2$ | $2.5995e-2$ |
| [18] First | 0.1 | 0.025 | 3.4687090 | 2.6716961 | 0.7292584 | $3.3517e-3$ | $2.0497e-3$ |
| [18] Second | | | 3.4686719 | 2.6716580 | 0.7292379 | $2.6987e-3$ | $1.6560e-3$ |
| Sunulan | | | 3.4686561 | 2.6700230 | 0.5920317 | $4.1992e-2$ | $2.5712e-2$ |
| [7] | 0.1 | 0.01 | 3.46866 | 2.67168 | 0.728881 | $2.4606e-3$ | $1.5662e-3$ |
| [19] | | | 3.4704395 | 2.6744459 | 0.7319875 | $1.5114e-3$ | $8.5758e-4$ |
| [24] | | | 3.468799 | 2.671742 | 0.730001 | $1.2834e-3$ | $8.2165e-4$ |
| [36] | | | 3.46865611 | 2.6716121 | 0.7292318 | $2.352e-3$ | $1.440e-3$ |
| Sunulan | | | 3.4686561 | 2.6715773 | 0.5935910 | $5.9827e-3$ | $3.6575e-3$ |
| [31] | 0.05 | 0.01 | 3.468709 | 2.671696 | 0.729303 | $8.696e-3$ | $5.314e-3$ |
| Sunulan | | | 3.4686561 | 2.6715666 | 0.5935971 | $5.9477e-3$ | $3.6366e-3$ |
| Analitik | | | 3.4686561 | 2.6716734 | 0.5937052 | | |

***Tablo 9.*** *Problem 1'in $p = 4$, $c = 0.3$ için $x \in [0, 100]$ aralığında $T = 10$ zamanında invaryantlarının ve hata normlarının karşılaştırması: $\Delta t = 0.01$*

| | $h$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $L_2$ | $L_\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [28] | 0.4 | 3.7592298 | 1.7300024 | 0.2894102 | $1.4373e-4$ | $7.1384e-5$ |
| Sunulan | | 3.7592298 | 1.7301470 | 0.0401750 | $5.4164e-4$ | $2.8040e-4$ |
| [35]M-I | 0.2 | 3.7592300 | 1.7300024 | 0.2894102 | $1.4368e-4$ | $7.1579e-5$ |
| [35]M-II | | 3.7593846 | 1.7300023 | 0.2894088 | $4.5922e-5$ | $4.9908e-5$ |
| Sunulan | | 3.7592300 | 1.7300120 | 0.0402611 | $1.6894e-4$ | $8.4930e-5$ |
| [7] | 0.1 | 3.75923 | 1.72999 | 0.289406 | $1.2254e-4$ | $6.6207e-5$ |
| [18] First | | 3.7592865 | 1.7300238 | 0.2894192 | $1.2763e-4$ | $6.2645e-5$ |
| [18] Second | | 3.7592863 | 1.7300259 | 0.2894169 | $9.8000e-5$ | $4.8084e-5$ |
| Sunulan | | 3.7592300 | 1.7300030 | 0.0402668 | $1.4527e-4$ | $7.2620e-5$ |
| Analitik | | 3.7592300 | 1.7300029 | 0.0402673 | | |




***Şekil 2.*** *Problem 1'in $p = 4$, $c = 4/3$, $0.3$ olmak üzere $T = 0(2)10$ zamanlarında sunulan şemayla sayısal (- -), analitik (–) çözümleri ve $T = 10$ zamanında mutlak hata grafikleri: $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$*

üst üste geldiği ve $c$ küçüldükçe mutlak hatanın da küçüldüğü görüldü. Son olarak, $T = 1$ de $c = 0.1$ ve $p = 3, 4, 6$ için $h = \Delta t = 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125$ olmak üzere Problem 1'in sunulan yöntemle elde edilen mutlak hatalarının log-log grafiği Şekil 4' de verildi. Şekildeki doğruların eğimleri sırasıyla $1.9802$, $1.9580$ ve $1.9280$ olup sunulan yöntemin yakınsaklık mertebesi $h = \Delta t$ için yaklaşık

***Tablo 10.*** *Problem 1'in $p = 6, 8, 10$ ve $c = 0.03$ için $T = 20$ zamanında hata normlarının karşılaştırılması*

| | | | $L_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $h$ | $\Delta t$ | $p = 6$ | $p = 8$ | $p = 10$ |
| [25] | 0.2 | 0.025 | $1.686e-3$ | $1.859e-3$ | $1.976e-3$ |
| [36] | 0.2 | 0.025 | $1.657e-3$ | $1.826e-3$ | $1.941e-3$ |
| Sunulan | 0.2 | 0.025 | $5.455e-5$ | $1.223e-4$ | $2.546e-4$ |
| [25] | 0.2 | 0.01 | $1.686e-3$ | $1.858e-3$ | $1.974e-3$ |
| [36] | 0.2 | 0.01 | $1.657e-3$ | $1.826e-3$ | $1.941e-3$ |
| Sunulan | 0.2 | 0.01 | $9.239e-6$ | $2.130e-5$ | $4.583e-5$ |
| [25] | 0.1 | 0.025 | $1.901e-3$ | $2.095e-3$ | $2.228e-3$ |
| [36] | 0.1 | 0.025 | $1.886e-3$ | $2.079e-3$ | $2.209e-3$ |
| Sunulan | 0.1 | 0.025 | $5.398e-5$ | $1.204e-4$ | $2.488e-4$ |
| [25] | 0.1 | 0.01 | $1.900e-3$ | $2.094e-3$ | $2.225e-3$ |
| [36] | 0.1 | 0.01 | $1.886e-3$ | $2.079e-3$ | $2.209e-3$ |
| Sunulan | 0.1 | 0.01 | $8.663e-6$ | $1.933e-5$ | $3.997e-5$ |
| | | | $L_\infty$ | | |
| | $h$ | $\Delta t$ | $p = 6$ | $p = 8$ | $p = 10$ |
| [25] | 0.2 | 0.025 | $7.65e-4$ | $8.43e-4$ | $8.96e-4$ |
| [36] | 0.2 | 0.025 | $7.89e-4$ | $8.69e-4$ | $9.24e-4$ |
| Sunulan | 0.2 | 0.025 | $2.21e-5$ | $5.08e-5$ | $1.09e-4$ |
| [25] | 0.2 | 0.01 | $7.65e-4$ | $8.43e-4$ | $8.96e-4$ |
| [36] | 0.2 | 0.01 | $7.89e-4$ | $8.69e-4$ | $9.24e-4$ |
| Sunulan | 0.2 | 0.01 | $3.77e-6$ | $8.90e-6$ | $1.97e-5$ |
| [25] | 0.1 | 0.025 | $7.65e-4$ | $8.43e-4$ | $8.96e-4$ |
| [36] | 0.1 | 0.025 | $7.89e-4$ | $8.69e-4$ | $9.24e-4$ |
| Sunulan | 0.1 | 0.025 | $2.19e-5$ | $5.00e-5$ | $1.06e-4$ |
| [25] | 0.1 | 0.01 | $7.65e-4$ | $8.43e-4$ | $8.96e-4$ |
| Sunulan | 0.1 | 0.01 | $3.51e-6$ | $8.03e-6$ | $1.71e-5$ |

olarak 2 olup hesaplama süresi $0.000051$ sn ile $85.265696$ sn arasındadır.

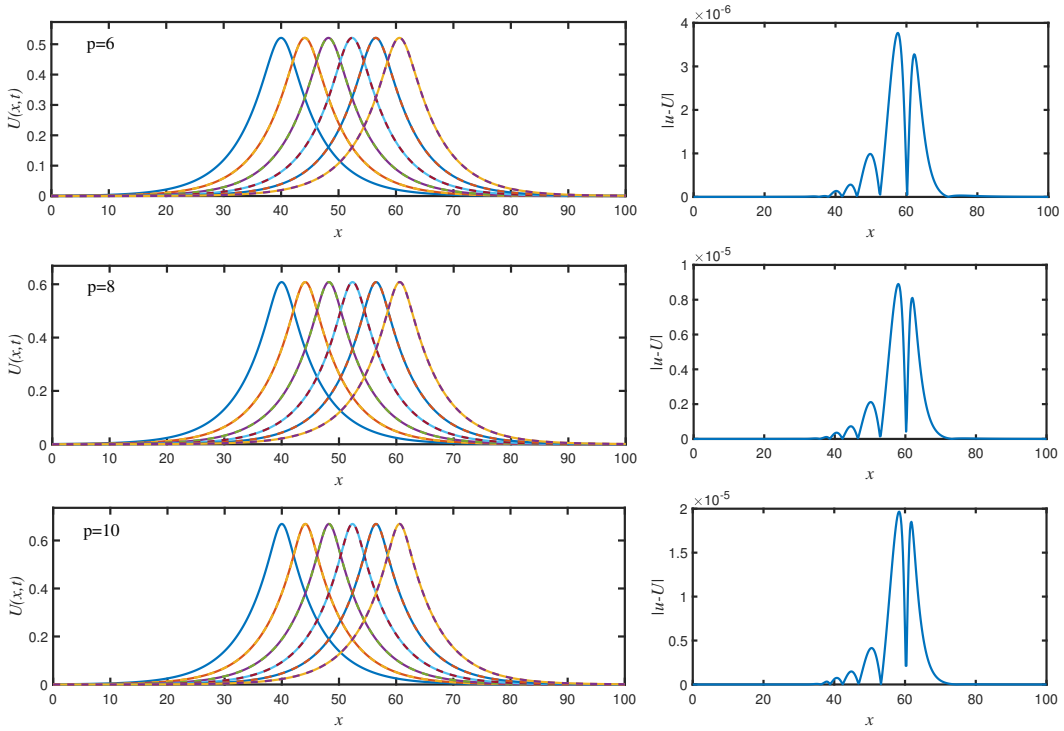
**Problem 2.** İki Soliter Dalganın Girişimi

İkinci problem olarak (1) ile verilen GRLW denkleminin

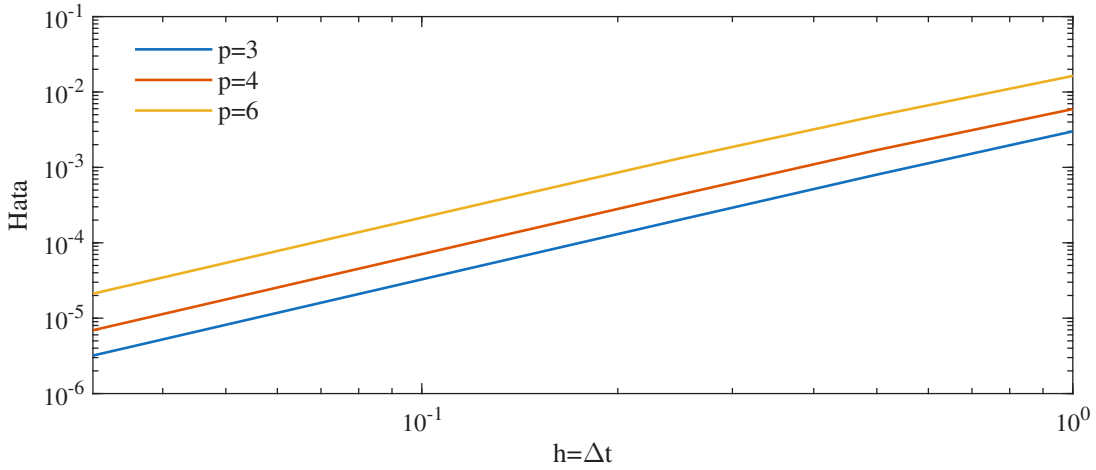
$$u(x,0) = \sum_{i=1}^{2} \sqrt[p]{Q_i \sec h^2\left(K_i\left(x - \widehat{x}_i\right)\right)}$$

başlangıç şartıyla sayısal çözümü $[0, T]$ zaman aralığında elde edildi. İki soliter dalganın girişimi olarak bilinen bu problemin analitik çözümü mevcut degildir. Burada, $i = 1, 2$ için $Q_i = c_i(p+2)/(2p)$, $K_i = p\sqrt{c_i/\left[4\mu\left(c_i+1\right)\right]}$ olup soliter dalgaların genlikleri ve hızları sırasıyla $A_i = \sqrt[p]{Q_i}$ ve $v_i = c_i + 1$ dir [12]. Bu durumda, $c_1 < c_2$ iken $A_1 < A_2$ ve $v_1 < v_2$ olacağı açıktır. Başlangıç anında soliter dalgaların genlikleri $\widehat{x}_1$ve $\widehat{x}_2$ apsisli noktalardadır. $\mu = 1$ ve çözüm bölgesi $(x,t) \in [0, 200] \times [0, T]$ olarak alındı.

**Durum 1:** İlk olarak, $p = 3,\ c_1 = 48/5,\ c_2 = 6/5$ olmak üzere başlangıç anında $\widehat{x}_1 = 20,\ \widehat{x}_2 = 50$ apsisli noktalarda genlikleri $A_1 = 2,\ A_2 = 1$ olan iki soliter dalganın hareketi $T = 10$ zamanına kadar gözlemlendi. Bu durumda, $x_1 <\ x_2, c_1 > c_2$ olduğundan başlanğıç anında büyük genlikli dalga küçük




***Şekil 3.*** *Problem 1'in $p = 6, 8, 10$, $c = 0.03$ için $T = 0(4)20$ zamanlarında sunulan şemayla sayısal (- -), analitik (–) çözümlerinin grafikleri ve $T = 20$ zamanında mutlak hata grafikleri: $\Delta t = 0.01$, $h = 0.1$*



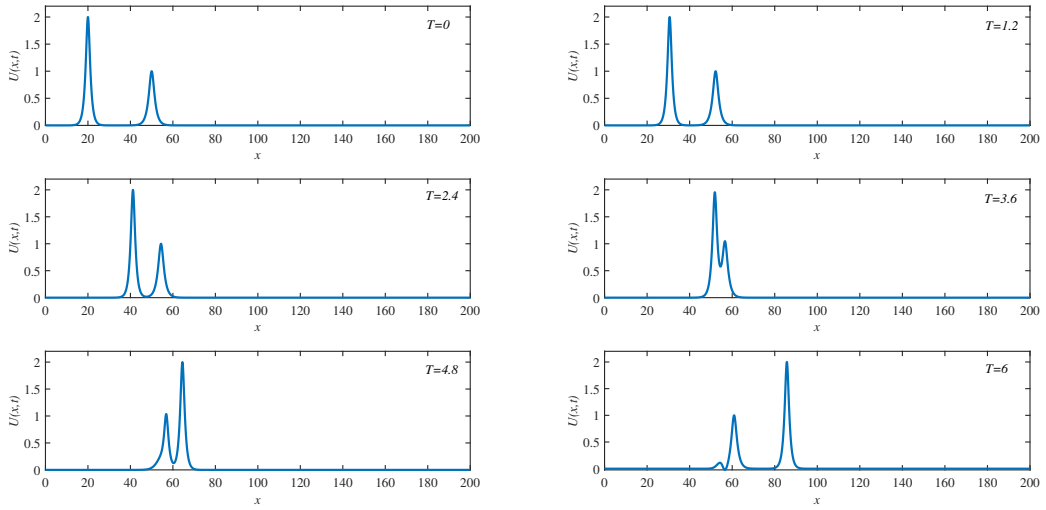

***Şekil 4.*** *Problem 1'in $T = 1$ de $c = 0.1$ ve $p = 3, 4, 6$ için log-log grafiği: $h = \Delta t$*

genlikli dalganın arkasında yer alır ve daha hızlıdır. $h = 0.1,\ \Delta t = 0.002$ adım uzunlukları için sunulan şema ile elde edilen sayısal çözümün invaryantları ve invaryantların bağıl hataları hesaplananarak Tablo 11' de verildi. Tablodan sunulan şemanın invaryantları yeterince iyi bir şekilde koruduğu görülmektedir. $h = 0.1,\ \Delta t = 0.002$ için iki soliter dalganın hareketinin $T = 0(1.2)6$ zamanlarında grafikleri Şekil 5' de verildi. Şekil 5' den $T = 0$ anında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalganın arkasında olduğu, $T = 2.4$ anında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgaya ulaştığı, $T = 3.6$ anında dalgaların iç içe geçtiği, $T = 4.8$ anında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalganın önüne geçerek dalgaların birbirlerinden ayrılmaya başladığı, $T = 6$ anında dalgaların tamamen birbirlerinden ayrılarak ilerledikleri ve küçük genlikli dalganın arkasında dalgacıklar oluştuğu görülmektedir. $T = 6$ anında iki soliter dalganın

***Tablo 11.*** *Problem 2'in* $p = 3,\ c_1 = 48/5,\ c_2 = 6/5,\ \widehat{x}_1 = 20,\ \widehat{x}_2 = 50$ *için invaryantları ve* $T = 6$ *zamanındaki bağıl hataları:* $h = 0.1,\ \Delta t = 0.002$

| $T$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 9.6907416486 | 12.9442725544 | 31.6733970799 |
| 2 | 9.6907416571 | 12.9441555316 | 31.6719932530 |
| 3 | 9.6907412291 | 12.9571405206 | 31.6583734239 |
| 4 | 9.6907421801 | 12.9419850307 | 31.6714261388 |
| 5 | 9.6907418624 | 12.9438530497 | 31.6684271894 |
| 6 | 9.6907418624 | 12.9436582498 | 31.6670746588 |
| 7 | 9.6907417328 | 12.9434145455 | 31.6657644402 |
| 8 | 9.6907417365 | 12.9432042975 | 31.6644270841 |
| 9 | 9.6907417466 | 12.9430121408 | 31.6630751024 |
| 10 | 9.6907417587 | 12.9428291413 | 31.6617158208 |
| $\Delta I_i/I_i$ | $1.572302e-8$ | $1.198493e-4$ | $4.112494e-4$ |

$\widehat{x}_1 = 85.7,\ \widehat{x}_2 = 60.9$ apsisli noktalarda genlikleri $A_1 = 2.001,\ A_2 = 1.0004$ olarak hesaplandı.

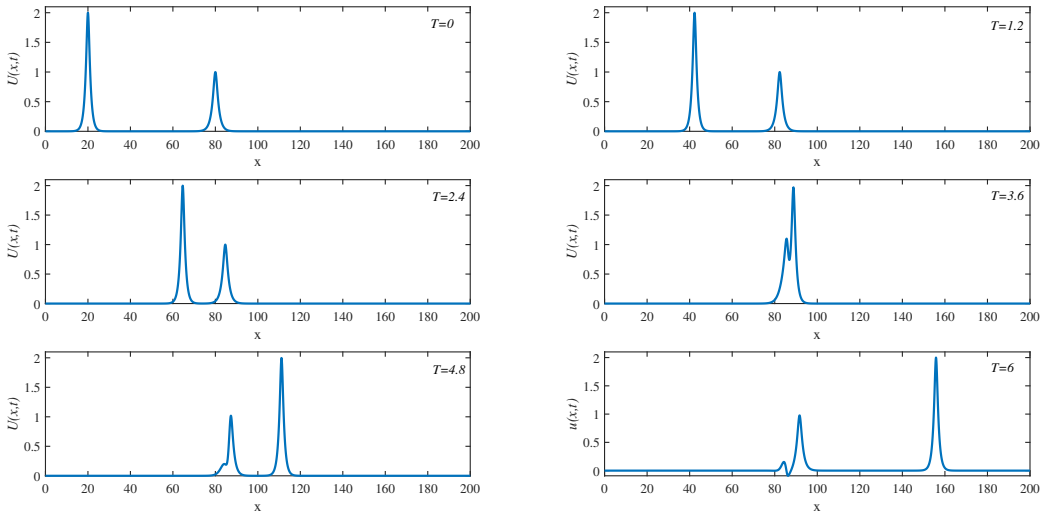



***Şekil 5.*** *Problem 2'in* $p = 3,\ c_1 = 48/5,\ c_2 = 6/5,\ \widehat{x}_1 = 20,\ \widehat{x}_2 = 50,$ *için çeşitli zamanlardaki grafikleri:* $h = 0.1,\ \Delta t = 0.002$

**Durum 2:** İkinci olarak, $p = 4,\ c_1 = 64/3,\ c_2 = 4/3$ olmak üzere başlangıç anında $\widehat{x}_1 = 20,\ \widehat{x}_2 = 80$ apsisli noktalarda genlikleri $A_1 = 2,\ A_2 = 1$ olan iki soliter dalganın hareketi $T = 6$ zamanına kadar gözlemlendi. $h = 0.1,\ \Delta t = 0.001$ adım uzunlukları için sunulan şema ile elde edilen sayısal çözümün invaryantları ve invaryantların bağıl hataları hesaplananarak Tablo 12' da verildi. Tablodan sunulan şemanın invaryantları yeterince iyi bir şekilde koruduğu görülmektedir. $h = 0.1,\ \Delta t = 0.001$ için iki soliter dalganın hareketinin $T = 0(1.2)6$ zamanlarında grafikleri Şekil 6' de verildi. Şekil 6' den $T = 1.2$, $T = 2.4$ anında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgaya yaklaştığı, $T = 3.6$ anında dalgaların birbiri içine geçtiği, $T = 4.8$ anında büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalganın önüne geçerek dalgaların birbirlerinden ayrıldığı, $T = 6$ anında dalgaların tamamen birbirlerinden ayrılarak ilerledikleri ve küçük genlikli dalganın arkasında dalgacıklar oluştuğu görülmektedir. $T = 6$ anında iki soliter dalganın $\widehat{x}_1 = 155.8,\ \widehat{x}_2 = 91.7$ apsisli noktalarda genlikleri $A_1 = 1.999,\ A_2 = 0.977$ olarak hesaplandı.

***Tablo 12.*** *Problem 2'in* $p = 4,\ c_1 = 64/3,\ c_2 = 4/3,\ x_1 = 20,\ x_2 = 80,$ *için invaryantları ve* $T = 6$ *zamanındaki bağıl hataları:* $h = 0.1,\ \Delta t = 0.001$

| $T$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8.8342726206 | 12.1697546944 | 49.7002368874 |
| 2 | 8.8342725740 | 12.1684543746 | 49.6794070089 |
| 3 | 8.8342720141 | 12.1419171828 | 49.6767751497 |
| 4 | 8.8342735531 | 12.1661637200 | 49.6405794964 |
| 5 | 8.8342726319 | 12.1648429190 | 49.6196024504 |
| 6 | 8.8342724867 | 12.1634793733 | 49.5986956866 |
| $\Delta I_i/I_i$ | $1.442002e-8$ | $6.086752e-4$ | $2.4588830e-3$ |




***Şekil 6.*** *Problem 2'in* $p = 4,\ c_1 = 64/3,\ c_2 = 4/3,\ \widehat{x}_1 = 20,\ \widehat{x}_2 = 80$ *için çeşitli zamanlardaki grafikleri:* $h = 0.1,\ \Delta t = 0.001$

**Problem 3.** Üç Soliter Soliter Dalganın Girişimi

Üçüncü problem olarak (1) ile verilen GRLW denkleminin

$$u(x,0) = \sum_{i=1}^{3} \sqrt[p]{Q_i \sec h^2\left(K_i\left(x - \widehat{x}_i\right)\right)}$$

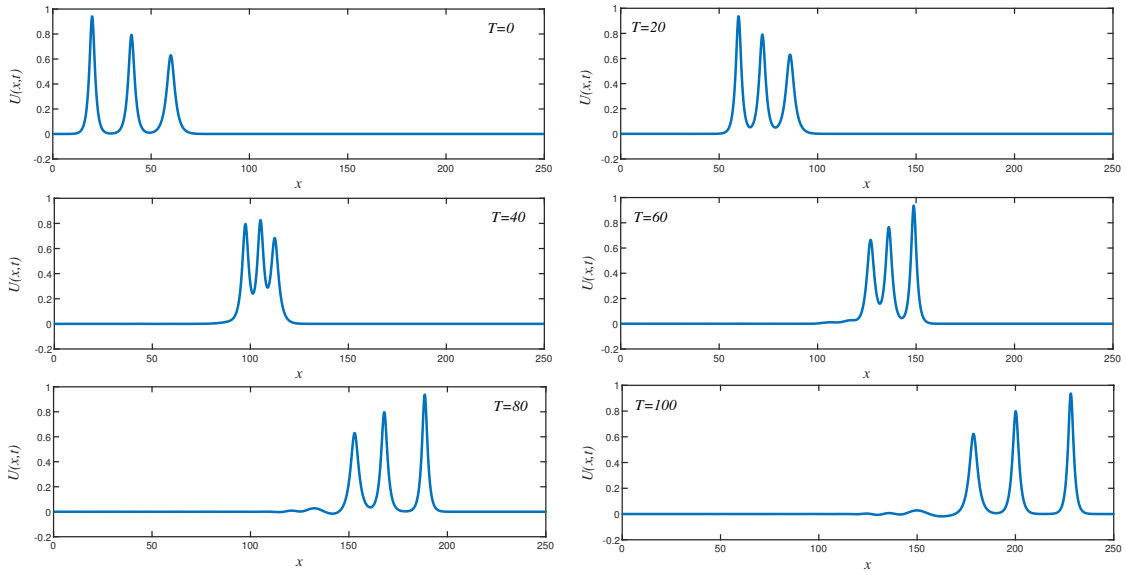
başlangıç şartıyla sayısal çözümü $[0,T]$ zaman aralığında elde edildi. Üç soliter dalganın girişimi olarak bilinen bu problemin analitik çözümü mevcut degildir. Burada, $i = 1,2,3$ için $Q_i = c_i(p+2)/(2p)$, $K_i = p\sqrt{c_i/\left[4\mu\left(c_i+1\right)\right]}$ olup soliter dalgaların genlikleri ve hızları sırasıyla $A_i = \sqrt[p]{Q_i}$ ve $v_i = c_i + 1$ dir [12]. Bu durumda, $c_1 < c_2 < c_3$ iken $A_1 < A_2 < A_3$ ve $v_1 < v_2 < v_3$ olacağı açıktır. Başlangıç anında soliter dalgaların genlikleri $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ve $\widehat{x}_3$ apsisli noktalardadır. $\mu = 1$ ve çözüm bölgesi $(x,t) \in [0,250] \times [0,T]$ olarak alındı.

Problem 3'ün $p = 3$ ve $p = 4$ için $c_1 = 1.0, c_2 = 0.6, c_3 = 0.3$ ve $\widehat{x}_1 = 20, \widehat{x}_2 = 40, \widehat{x}_3 = 60$ olmak üzere $h = 0.1, \Delta t = 0.05$ adım uzunlukları için $T = 20(20)100$ zamanlarında sunulan şemayla hesaplanan invaryantlarının Li ve Mei [23] ile karşılaştırması Tablo 13' de verildi. $p = 3$ için invaryantların analitik değerleri ve invaryantların bağıl hataları sırasıyla $I_1 = 11.044429960145241$, $I_2 = 6.249119169242890$, $I_3 = 0.998888431622668$ ve $\Delta I_1/I_1 = 6.172070e-8$, $\Delta I_2/I_2 = 2.510044e-3$,

***Tablo 13.*** *Problem 3'ün $p = 3$ ve $p = 4$ için $c_1 = 1.0, c_2 = 0.6, c_3 = 0.3$ ve $\widehat{x}_1 = 20, \widehat{x}_2 = 40, \widehat{x}_3 = 60$ olmak üzere çeşitli zamanlarda invaryantları: $h = 0.1, \Delta t = 0.05$*

| | $p = 3$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Sunulan | | | Li ve Mei [23] | |
| $T$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_1$ | $I_2$ |
| 20 | 11.0444299249 | 6.2456159343 | 0.9954794496 | 11.044429960142052 | 6.2410640752796365 |
| 40 | 11.0444297813 | 6.2433031206 | 0.9905030227 | 11.044429960142176 | 6.2410640752796409 |
| 60 | 11.0444299210 | 6.2399484133 | 0.9929153376 | 11.044429960142354 | 6.2410640752796525 |
| 80 | 11.0444299748 | 6.2371347934 | 0.9897505922 | 11.044429960142425 | 6.2410640752796276 |
| 100 | 11.0444277545 | 6.2334336066 | 0.9868594791 | 11.044429960142389 | 6.2410640752796347 |
| | $p = 4$ | | | | |
| $T$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_1$ | $I_2$ |
| 20 | 10.7170027165 | 6.1693316643 | 0.5392225151 | 10.7170029508726543 | 6.1689585462949657 |
| 40 | 10.7170022576 | 6.1624297921 | 0.5322012985 | 10.7170029508726845 | 6.1689585462949790 |
| 60 | 10.7170024890 | 6.1565206954 | 0.5324456982 | 10.7170029508726863 | 6.1689585462949648 |
| 80 | 10.7170026580 | 6.1482036008 | 0.5259994604 | 10.7170029508726774 | 6.1689585462949692 |
| 100 | 10.7169987101 | 6.1390466491 | 0.5197627747 | 10.7170029508726969 | 6.1689585462949683 |

$\Delta I_3/I_3 = 1.204234e-2$ dir. Üç dalganın girişiminin $T = 0(20)100$ zamanlarındaki grafiği Şekil 7' da verildi. Şekilden, $T = 20$ de büyük genlikli dalgaların küçük genlikli dalgaya yaklaştıkları, $T = 40$ da dalgaların iç içe girdikleri, $T = 60$ da büyük genlikli dalgaların öne geçtikleri, $T = 80$ ve $T = 100$ de en büyük genlikli dalganın en öne geçerek dalgaların birbirlerinden ayrılarak sağa doğru hareket ettikleri görülmektedir. $p = 4$ için invaryantların analitik değerleri ve invaryantların bağıl hataları sırasıyla $I_1 = 10.717002950872692$, $I_2 = 6.179145294590751$, $I_3 = 0.546663736391744$ ve $\Delta I_1/I_1 = 2.704277e-7$, $\Delta I_2/I_2 = 6.489351e-3$, $\Delta I_3/I_3 = 4.920934e-2$ dir. Tablo 13' den sunulan şemanın invaryantları yeterince iyi bir şekilde koruduğu görülmektedir. $p = 3$ için $T = 0$ da dalgaların genlikleri $A_1 = 0.94104$, $A_2 = 0.79370$, $A_3 = 0.62996$ dir. $T = 100$ de sunulan yöntemle elde edilen sonuçlara göre dalgaların genlikleri ve konumları sırasıyla $A_1 = 0.93627$, $A_2 = 0.79859$, $A_3 = 0.62312$ ve $\widehat{x}_1 = 228.2, \widehat{x}_2 = 200.1, \widehat{x}_3 = 178.7$ dir. $p = 4$ için $T = 0$ da dalgaların genlikleri $A_1 = 0.93060$, $A_2 = 0.81904$, $A_3 = 0.68872$ dir. $T = 100$ de sunulan yöntemle elde edilen sonuçlara göre dalgaların genlikleri ve konumları sırasıyla $A_1 = 0.92062$, $A_2 = 0.81910$, $A_3 = 0.68517$ ve $\widehat{x}_1 = 226.5, \widehat{x}_2 = 199.2, \widehat{x}_3 = 178.1$ dir.




***Şekil 7.*** *Problem 3'ün* $p = 3$ *için* $c_1 = 1.0, c_2 = 0.6, c_3 = 0.3$ *ve* $\widehat{x}_1 = 20, \widehat{x}_2 = 40, \widehat{x}_3 = 60$ *olmak üzere çeşitli zamanlardaki grafikleri:* $h = 0.1, \Delta t = 0.05$

**Sonuç**

Bu çalışmada, kübik Hermite B-splayn kollakasyon yöntemi kullanırak GRLW denkleminin sayısal çözümü için bir lineer sayısal şema elde edildi. Elde edilen sayısal şema çeşitli $p$ ve $c$ değerleri için bir soliter dalga problemi ile iki ve üç soliter dalganın girişimi problemlerine uygulanarak korunum sabitleri ve analitik çözümü mevcut olan problem için hata normları hesaplandı ve daha önceki bazı çalışmalarla karşılaştırma tabloları yapıldı. Ayrıca üç problemin farklı $p$ ve $c$ değerleri için çeşitli $t$ zamanlarında ki sayısal ve analitik sonuçları grafikler ile sunuldu. Tablolardan ve grafiklerden önerilen sayısal şemanın problemlerin korunum sabitlerini yeterince doğru bir şekilde koruması iyi bir performansa sahip olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, benzer yüksek dereceli nonlineerlik parametresi içeren kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü elde etmek için önerilen sayısal şema kolaylıkla uygulanabilir.

**Beyanlar**

***Teşekkür:***

***Fon/Finansman Bilgileri:*** Yazarlar araştırma, yazarlık ya da çalışmanın yayınlanması için herhangi bir finansman destek almadıklarını beyan eder.

***Etik Kurul Onayı ve İzinler:*** Yazarlar çalışmanın etik kurul izni ve herhangi bir özel izin gerektirmediğini beyan eder.

***Çıkar Çatışmaları/Çatışan Çıkarlar:*** Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

***Yazarların Katkısı:*** Tüm yazarlar eşit oranında katkı sağlamıştır. Tüm yazarlar makalenin son halini okumuş ve onaylamıştır.

***Yapay Zeka (AI) Kullanımı:*** Yazarlar, bu çalışmanın yazımı, veri analizi, tablo ve şekil üretimi süreçlerinde hiçbir yapay zekâ veya yapay zekâ destekli aracın kullanılmadığını beyan eder.

## Kaynaklar

[1] Peregrine, D. H. (1966). Calculations of the development of an undular bore. *Journal of Fluid Mechanics*, 25, 321–330. https://doi.org/10.1017/S0022112066001678

[2] Peregrine, D. H. (1967). Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(4), 815-827. https://doi.org/10.1017/S0022112067002605

[3] Zhang, L. (2005). A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation. *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 962-972. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.09.027

[4] Ramos, J. I. (2007). Solitary wave interactions of the GRLW equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 33(2), 479-491. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.01.016

[5] Mokhtari, R., & Mohammadi, M. (2010). Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method. *Computer Physics Communications*, 181(7), 1266-1274. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.03.015

[6] Wang, J. F., Bai, F. N., & Cheng, Y. M. (2011). A meshless method for the nonlinear generalized regularized long wave equation. *Chinese Physics B*, 20(3), Article 030206. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1056/20/3/030206

[7] Roshan, T. (2012). A Petrov–Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 63(5), 943-956. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.059

[8] El-Danaf, T. S., Raslan, K. R., & Ali, K. K. (2014). New numerical treatment for the generalized regularized long wave equation based on finite difference scheme. *International Journal of Soft Computing and Engineering*, 4(4), 16-24. https://www.ijsce.org/portfolio-item/D2328094414/

[9] Berikelashvili, G., & Mirianashvili, M. (2014). On the convergence of difference schemes for generalized Benjamin–Bona–Mahony equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(1), 301-320. https://doi.org/10.1002/num.21810

[10] Akbari, R., & Mokhtari, R. (2014). A new compact finite difference method for solving the generalized long wave equation. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 35(2), 133-152. https://doi.org/10.1080/01630563.2013.830128

[11] Guo, P. F., Zhang, L. W., & Liew, K. M. (2014). Numerical analysis of generalized regularized long wave equation using the element-free KP-Ritz method. *Applied Mathematics and Computation*, 240, 91-101. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.04.023

[12] Hammad, D. A., & El-Azab, M. S. (2015). A 2N order compact finite difference method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation. *Applied Mathematics and Computation*, 253, 248-261. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.070

[13] García-López, C. M., & Ramos, J. I. (2015). Solitary waves generated by bell-shaped initial conditions in the inviscid and viscous GRLW equations. *Applied Mathematical Modelling*, 39(21), 6645-6668. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.02.016

[14] Pan, X., Che, H., & Wang, Y. (2015). A high-accuracy compact conservative scheme for generalized regularized long-wave equation. *Boundary Value Problems*, 2015, Article 141. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0404-7

[15] Mohammadi, R. (2015). Exponential B-spline collocation method for numerical solution of the generalized regularized long wave equation. *Chinese Physics B*, 24(5), Article 050206. https://doi.org/10.1088/1674-1056/24/5/050206

[16] Li, S., Wang, J., & Luo, Y. (2015). A Fourth-Order conservative compact finite difference scheme for the generalized RLW equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015(1), Article 960602. https://doi.org/10.1155/2015/960602

[17] Hammad, D. A., & El-Azab, M. (2016). Chebyshev–Chebyshev spectral collocation method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation. *Applied Mathematics and Computation*, 285, 228-240. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.03.033

[18] Karakoç, S. B. G., & Zeybek, H. (2016). Solitary-wave solutions of the GRLW equation using septic B-spline collocation method. *Applied Mathematics and Computation*, 289, 159-171. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.05.021

[19] Zeybek, H., & Karakoç, S. B. G. (2016). A numerical investigation of the GRLW equation using lumped Galerkin approach with cubic B-spline. *SpringerPlus*, 5(1), Article 199. https://doi.org/10.1186/s40064-016-1773-9

[20] Ramos, J. I. (2016). On the accuracy of some explicit and implicit methods for the inviscid GRLW equation subject to initial Gaussian conditions. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 26(3), 698-721. https://doi.org/10.1108/HFF-07-2015-0288

[21] El-Danaf, T. S., Raslan, K. R., & Ali, K. K. (2017). Non-polynomial spline method for solving the generalized regularized long wave equation. *Communication in Mathematical Modeling and Applications*, 2(2), 1-17. https://dergipark.org.tr/tr/pub/cmma/issue/35978/403634

[22] Ramos, J. I., & García–López, C. M. (2017). Time-linearized, compact methods for the inviscid GRLW equation subject to initial Gaussian conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 48, 353-383. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.04.014

[23] Li, Q., & Mei, L. (2018). Local momentum-preserving algorithms for the GRLW equation. Applied Mathematics and Computation, 330, 77-92. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.033

[24] Bhowmik, S. K., & Karakoç, S. B. (2019). Numerical approximation of the generalized regularized long wave equation using Petrov–Galerkin finite element method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 35(6), 2236-2257. https://doi.org/10.1002/num.22410

[25] Zeybek, H., & Karakoç, S. (2019). A collocation algorithm based on quintic B-splines for the solitary wave simulation of the GRLW equation. *Scientia Iranica*, 26(6), 3356-3368. https://doi.org/10.24200/sci.2018.20781

[26] Alharbi, A. R. (2020). Numerical investigation for the GRLW equation using parabolic Monge Ampere equation. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 15(2), 443-462. https://future-in-tech.net/15.2/R-Alharbi.pdf

[27] Rouatbi, A., Labidi, M., & Omrani, K. (2020). Conservative difference scheme of solitary wave solutions of the generalized regularized long-wave equation. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 51(4), 1317-1342. https://doi.org/10.1007/s13226-020-0468-7

[28] Oruç, Ö. (2020). Numerical investigation of nonlinear generalized regularized long wave equation via delta-shaped basis functions. *An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications*, 10(2), 244-258. https://doi.org/10.11121/ijocta.01.2020.00881

[29] Hammad, D. A. (2021). Application of Bernstein collocation method for solving the generalized regularized long wave equations. *Ain Shams Engineering Journal*, 12(4), 4081-4089. https://doi.org/10.1016/j.asej.2021.04.005

[30] Almatrafi, M. B., Alharbi, A., Lotfy, K., & El-Bary, A. A. (2021). Exact and numerical solutions for the GBBM equation using an adaptive moving mesh method. *Alexandria Engineering Journal*, 60(5), 4441-4450. https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.03.023

[31] Karakoç, S. B. G., Mei, L., & Ali, K. K. (2022). Two efficient methods for solving the generalized regularized long wave equation. *Applicable Analysis*, 101(13), 4721-4742. https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1869942

[32] Al-Humedi, H. O. (2022). Combining B-spline least-square schemes with different weight functions to solve the generalized regularized long wave equation. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13(1), 159-177. https://doi.org/10.22075/ijnaa.2022.5468

[33] Behnood, M., & Shokri, A. (2022). A Legendre spectral element method for the family of regularized long wave equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 201, 239-253. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.05.019

[34] Shallu, & Kukreja, V. K. (2023). Solution of the generalized regularized long-wave equation with optimal spline collocation technique and implicit Crank–Nicolson as well as explicit SSP-RK43 scheme. *International Journal of Computer Mathematics*, 100(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/00207160.2022.2078662

[35] Kumari, A., & Kukreja, V. K. (2023). Study of generalized regularized long wave equation via septic Hermite collocation method with Crank–Nicolson and SSP-RK43 schemes to capture the various solitons. *Wave Motion*, 122, Article 103188. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2023.103188

[36] Karta, M. (2005). More efficient solutions for numerical analysis of the nonlinear generalized regularized long wave (GRLW) using the operator splitting method. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 8(2), 72-87. https://doi.org/10.33401/fujma.1461430

[37] Oruç, Ö. (2025). An extrapolated second-order BDF combined with local meshfree radial point interpolation method for numerical simulation of multi-dimensional regularized long wave equation emerging in fluids. *Journal of Scientific Computing*, 104(44), 1-32. https://doi.org/10.1007/s10915-025-02948-4

[38] Oruç, Ö. (2025). A barycentric Floater–Hormann interpolation with time splitting for numerical simulation of multi-dimensional regularized long wave equation. *Computational and Applied Mathematics*, 44(225), 1-28. https://doi.org/10.1007/s40314-025-03183-1

[39] Prenter, P. M. (1989). *Splines and variational methods*. John Wiley & Sons Inc.

[40] de Boor, C. (1978). *A practical guide to splines*. Springer Verlag.

[41] Kumari, A., & Kukreja, V. K. (2023). Survey of Hermite interpolating polynomials for the solution of differential equations. *Mathematics*, 11(14), 3157. https://doi.org/10.3390/math11143157

[42] Rubin, S. G., & Graves R. A. (1975). *A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*. (Report No. NASA TR R-436). National Aeronautics and Space Administration.

[43] Rashidinia, J., & Rasoulizadeh, M. N. (2019). Numerical methods based on radial basis function-generated finite difference (RBF-FD) for solution of GKdVB equation. *Wave Motion*, 90, 152–167. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.05.006

[44] Biswas, A. (2010). Solitary waves for power-law regularized long-wave equation and $R(m, n)$ equation. *Nonlinear Dynamics*, 59, 423–426. https://doi.org/10.1007/s11071-009-9548-2